ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΑΥΣΜΑ

ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 445 & ΟΡΦΕΩΣ 1, Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΕΞΟΔΟΣ 9 ΑΤΤΙΚΗΣ ΟΔΟΥ Τ: 213 04 15 334
www.enavsma.edu.gr email:info@enavsma.edu.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ στο (α, x_o) και η $f'(x)<0$ στο (β, x_0), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

(Μονάδες 7)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α1:

Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Α2: Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α2:

Σχολικό βιβλίο σελ 141

Α3: Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α3:

Σχολικό βιβλίο σελ 247-248

Α4: Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow R$, αν G είναι μια παραγούσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x0 και ισχύει f(x)≤g(x) κοντά στο x0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f′(x)=0 για κάθε $x \in (\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y=f(x) έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή μ και μια ελάχιστη τιμή m.

(Μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α4:

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}, x\in R$.

Β1: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β1:

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} \qquad D_f = R$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x*x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{(x^2+1)^2}x$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$$f'(x)>0 \overset{\frac{2}{(x^2+1)^2}>0}{\Leftrightarrow} x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$f(0)=0$ Ε	↗

Η f συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f'(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

B2: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ B2:

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1)^2}\right)'=\left(\frac{2(x^2+1)^2-(x^2+1)2x\cdot 2x}{(x^2+1)^4}\right)=\frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)^3}(1-(\sqrt{3}x)^2)=\frac{2}{(x^2+1)^3}(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	Σ.Κ	$\smile$	Σ.Κ	$\frown$	

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\overset{f \text{ άρτια}}{=}\frac{1}{4}$ άρα σημεία καμπής $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right),B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$

Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $f''(x)<0$, $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $f''(x)>0$, $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, άρα η f κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και $f''(x)<0$, $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 7)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β3:

Επειδή η f συνεχής στο $D_f=(-\infty,+\infty)$ δεν αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες. Για ασύμπτωτες στο $-\infty$ και το $+\infty$ έχουμε:

«πλάγιες – οριζόντιες» στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \text{ άρα } \lambda=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1, \text{ άρα } \beta=1$$

Και τελικά η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

«πλάγιες – οριζόντιες» στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\text{, άρα } \lambda=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\text{, άρα } \beta=1$$

Και τελικά η ίδια ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4: Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

(Μονάδες 3)

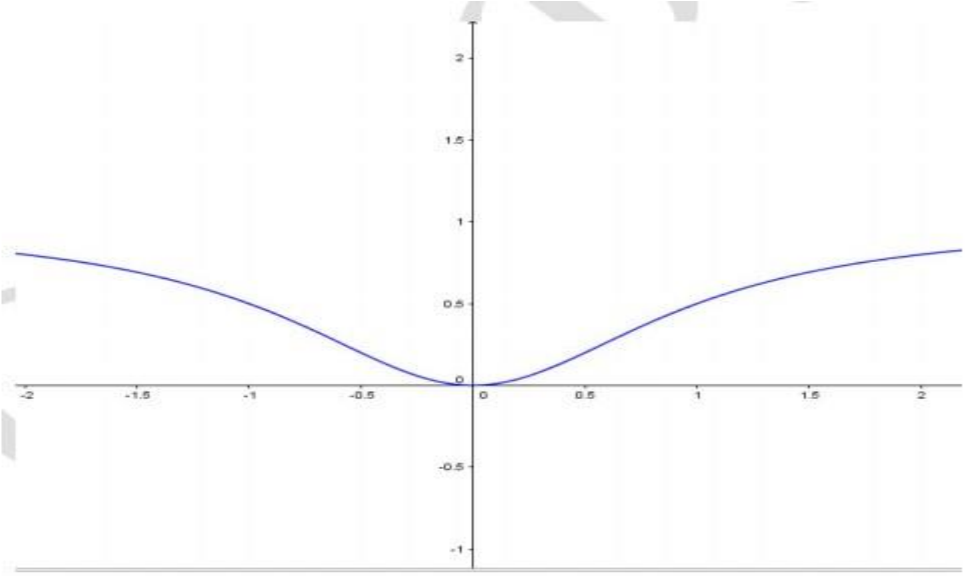
ΑΠΑΝΤΗΣΗ B4:

Παρατηρώ ότι $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$, $x\in R$ άρα η f άρτια.

Επίσης f(0)=0 οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο 0(0,0).

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+		+		-	
$f'(x)$		-		-	0	+	0	+	



ΘΕΜΑ Γ

Γ1: Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0,\ x\in R$.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ1:

Είναι $e^{x^2}-x^2-1=0$

<u>Α΄ τρόπος</u>

$e^{x^2}-x^2-1=0$ (1)

Προφανής ρίζα η x=0

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)= $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in R$.

Η h παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=e^{x^2}2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$

$h'(x)$	-	+
h	↘	↗

Η h(x) έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=0$ οπότε $h(x)\geq h(x)=0$.

Άρα η $h(x)=0$ μόνο για $x=0$.

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε $h(x)=e^x-x-1$, $x\in R$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x)=e^x-1$

Η $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x \text{γν,αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x>0$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x \text{γν,αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x<0$

συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
h	↘		↗

Η h(x) έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=0$ οπότε $h(x)\geq h(0)=0$.

Άρα η $h(x^2)=0$ μόνο για $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ αφού για $x\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0$ άρα $h(x^2)>0$.

<u>Γ' τρόπος</u>

Από τη βασική ανισότητα $\ln x\leq x-1$, $x>0$ θέτοντας όπου $x\to e^{x^2}$, $x\in R$ γίνεται:

$\ln e^{x^2} \leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ με το «=» να ισχύει μόνο για την τιμή $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

<u>Δ΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε $h(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2+1}$, $x\in R$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $h'(x)=\dfrac{e^{x^2}2x(x^2+1)-e^{x^2}(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^{x^2}2x(x^2+1-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^{x^2}2x^3}{(x^2+1)^2}$

Έχουμε $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow x>0$

$h'(x)<0\Leftrightarrow x<0$

οπότε :

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$h'(x)$	-	+
h	↘	↗

O.E το h(0)

Άρα $h(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$

Για $x>0 \overset{h\ \gamma\nu.\alpha ύ\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} h(x)>1\Leftrightarrow e^{x^2}>x^2+1$

Για $x<0 \overset{h\ \gamma\nu.\alpha ύ\varphi\theta\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} h(x)>1\Leftrightarrow e^{x^2}>x^2+1$

Άρα η $x=0$ είναι μοναδική λύση της $e^{x^2}=x^2+1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.
Άρα για την εφαπτομένη C_h στο $x_0=0$ είναι $y-h(0)=h'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=0\Leftrightarrow y=0$
άρα $h(x)\geq 0$ οπότε $e^x-x-1\geq 0$ για $x\in R$.

Άρα όπου x το x^2 είναι $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ δηλαδή η $x=0$ μοναδική ρίζα της (1).

Γ2: Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$ για κάθε $x\in R$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ2:

$$f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2\Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \overset{\text{από (Γ1)Ά'τρόπος}}{\Leftrightarrow} |f(x)=e^{x^2}-x^2-1|$$

Επειδή $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ από Γ1 τότε η $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0\Leftrightarrow x=0$ μοναδική ρίζα. Άρα η συνεχής συνάρτηση f(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0)$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$ τότε:

- $f(x)>0$ στα Δ_1 και Δ_2 είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$.
- $f(x)<0$ στα Δ_1 και Δ_2 είναι $-f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Rightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in R$.
- $f(x)>0$ στο Δ_1 και $f(x)<0$ στο Δ_2 είναι: $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$
- $f(x)<0$ στο Δ_1 και $f(x)>0$ στο Δ_2 είναι: $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$

Γ3: Αν f(x) $=e^{x^2}-x^2-1, x\in R$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ3:

<u>Α΄ τρόπος:</u>

Είναι $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$ (παραγωγίσιμη ως πράξη σύνθεση μεταξύ παραγωγισίμων) και $f''(x)=2(e^{x^2}-1)+2x2xe^{x^2} \Leftrightarrow f''(x)=2e^{x^2}-2+4x^2e^{x^2}$ (παραγωγίσιμη ως πράξη σύνθεση μεταξύ παραγωγισίμων) και $f'''(x)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=4xe^{x^2}(2x^2+3)$

Άρα ο πίνακας μεταβολών για την f'' είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	-		+
f''	↘		↗
		Ο.Ε	

Η f'' έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, άρα $f''(x)\geq f''(0)=0$, άρα η $f''(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ και για $x\neq 0$ $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή, για κάθε $x\in R$.

<u>Β΄τρόπος</u>

$$f'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=e^{x^2}2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$$

$$0<x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} e^{x_1^2}<e^{x_2^2} \Leftrightarrow e^{x_1^2}-1<e^{x_2^2}-1 \quad (2)$$

Για $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2$ (3)

Οι (2),(3) είναι ανισότητες ίδιας φοράς με όλα τους τα μέλη θετικά, άρα $2x_1(e^{x_1^2}-1)<2x_2(e^{x_2^2}-1) \Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για $x_1<x_2<0$ είναι $-x_1>-x_2>0$ οπότε $f'(-x_1)>f'(-x_2)$ (4)

Η $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$ είναι περιττή καθώς για κάθε $x\in D_f$ και $-x\in D_f$ και, άρα $f'(-x)=-2x(e^{x^2}-1)=-f'(x)$, άρα η (4) $-f'(x_1)>-f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in(-\infty,0)$.

Επειδή η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ (πράξη σύνθεση συνεχών) η f' είναι τελικά γνησίως αύξουσα στο R, άρα η f είναι κυρτή.

Γ4: Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση: $f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x)$ όταν $x\in[0,+\infty)$.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ4:

Έχουμε :

$f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x)$ (1), $x\geq 0$

Θεωρούμε $g(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$g'(x)=f'(x+3)(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

Για $x\geq 0$, $x<x+3\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow g'(x)>0$, οπότε g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Άρα η g είναι «1-1».

(1)$\Leftrightarrow$ $g(|ημx|)=g(x)\overset{g\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}|ημx|=x\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}|ημx|=|x|\Leftrightarrow x=0$, από θεωρία σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))ημx\,dx=\pi$
- $f(R)=R$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in R$.

Δ1: Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ1:

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))ημxdx=π \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)ημxdx+\int_0^{\pi}(f'(x))'ημxdx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)ημxdx+[f'(x)ημx]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)συνxdx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)ημxdx+f'(π)ημπ-f'(0)ημ0-[f(x)συνx]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)(συνx)'dx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)ημxdx-f(π)συνπ+f(0)ημ0-\int_0^{\pi} f(x)ημxdx=π \Leftrightarrow f(π)+f(0)=π \quad (1)$$

- Κοντά στο 0 θεωρώ $g(x)=\dfrac{f(x)}{ημx}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, $f(x)=g(x)ημx$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(g(x)ημx)=1\cdot 0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο R (ως παραγωγίσιμη), άρα και στο 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(x)=f(0)=0$, άρα η (1)

  $f(π)+0=π \Leftrightarrow f(π)=π$.
- f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με

  $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)ημx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(g(x)\dfrac{ημx}{x})=1\cdot 1=1$

Δ2: α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ2: α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε $x_0 \in R$. Τότε το x_0 εσωτερικό του D_f, f παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα από Θ. fermat $f'(x_0)=0$.

Έχουμε $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$, $x\in R$, άρα $e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$

Για $x=x_0$ $e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0} \Leftrightarrow 1=e^{x_0} \Leftrightarrow x_0=0$ άρα $f'(0)=0$ άτοπο αφού $f'(0)=1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο R.

β) Αφού f′συνεχής στο R (γιατί η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R) και $f'(x)\neq 0$, $x\in R$ (από α) η f′ διατηρεί πρόσημο στο R. Όμως $f'(0)=1>0$, άρα $f'(x)>0$, $x\in R$, επομένως η f γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3: Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ημx+συνx}{f(x)}$.

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ3:

Αφού η f συνεχής στο R και γνησίως αύξουσα στο R, με $f((-\infty,+\infty))=(A,B)$, όπου $A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, όμως $f((-\infty,+\infty))=R$, άρα $=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Έχουμε στο $+\infty$

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|+\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}+\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|}+\frac{1}{|f(x)|}=\frac{2}{|f(x)|}$$

Άρα $-\dfrac{2}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{|f(x)|}$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{|f(x)|}\right)=0$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{|f(x)|}\right)=0$ άρα από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right)=0$

Δ4: Να δείξετε ότι $0<\displaystyle\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$.

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ4:

Για $1\le x\le e^{\pi} \overset{\ln x \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \ln 1\le\ln x\le\ln e^{\pi}\Leftrightarrow 0\le\ln x\le\pi \overset{f \text{ γ.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$ $f(0)\le f(\ln x)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(\ln x)\le\pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0\le\dfrac{f(\ln x)}{x}\le\dfrac{\pi}{x}$

- έχουμε $\dfrac{f(\ln x)}{x}\ge 0$, $x\in[1,e^{\pi}]$ και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx>0$
- έχουμε $\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{f(\ln x)}{x}\ge 0$, $x\in[1, e^{\pi}]$ και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^{\pi}$,

άρα $\int_1^{e^\pi} \left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x}\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x}dx - \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx > 0 \Leftrightarrow [\pi \ln x]_1^{e^\pi} -$ $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx > 0 \Leftrightarrow \pi \ln e^\pi - \int_1^{e^\rho} \frac{f(\ln x)}{x}dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$, άρα

$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$