



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2025
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

02/06/2025



...για εμάς, τα δικά σου όνειρα!

ΔΕΣΠΟΙΝΑ



...για εμάς, τα δικά σου όνειρα!

ΔΕΣΠΟΙΝΑ Σ. ΠΑΠΠΑ - ΝΙΚΟΣ ΣΤ. ΚΕΜΕΝΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΣΕΛ. 186)

A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΣΕΛ. 76)

A3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΣΕΛ. 161)

A4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$, από το θεώρημα Fermat για τα τοπικά ακρότατα, παίρνουμε ότι $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

B2. Είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 3)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f				

Diagram illustrating the sign of the first derivative $f'(x)$ and the function $f(x)$ on the intervals defined by the critical points $x=1$ and $x=3$. The sign of $f'(x)$ is positive for $x < 1$ and $x > 3$, and negative for $1 < x < 3$. The function $f(x)$ is increasing on $(-\infty, 1)$ and $(3, +\infty)$, and decreasing on $(1, 3)$.

Είναι $f(0) = -3$ και $f(1) = 1$, άρα $f(0)f(1) < 0$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_1) = 0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, η ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(0, 1)$.

Είναι $f(1) = 1$ και $f(3) = -3$, άρα $f(1)f(3) < 0$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$. Άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1, 3)$ ώστε $f(x_2) = 0$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 3)$, η ρίζα x_2 είναι μοναδική στο $(1, 3)$.

Είναι $f(3) = -3$ και $f(4) = 1$, άρα $f(3)f(4) < 0$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[3, 4]$. Άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in (3, 4)$ ώστε $f(x_3) = 0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(3, 4)$, η ρίζα x_3 είναι μοναδική στο $(3, 4)$. Τέλος, $f(1) = 1 \neq 0$ και $f(3) = -3 \neq 0$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες, τις x_1, x_2, x_3 .

B3. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
f	↪		↩

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Επίσης $f(2) = -1$. Άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $M(2, -1)$.

B4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$g'(x) = (x + f(x))' = 1 + f'(x)$$

Έχουμε ότι $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$, άρα $g'(\xi) \neq f'(\xi)$. Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων ευθειών είναι διαφορετικοί, άρα εφαπτόμενες ευθείες τέμνονται.

Εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της C_g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$:

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi)$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο παραπάνω ευθειών.

$$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = (1 + f'(\xi))x + \xi + f(\xi) - \xi(1 + f'(\xi)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = x + f'(\xi)x + \xi + f(\xi) - \xi - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow x = 0$$

Η τετμημένη του σημείου τομής είναι ίση με 0, οπότε οι παραπάνω ευθείες τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Επίσης $f(0) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Τώρα αποδεικνύουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x\sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty \end{aligned}$$

Το δεξί πλευρικό όριο στο $x_0 = 0$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Αρχικά μελετάμε αν η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στο σημείο $x_0 = 0$, η f είναι συνεχής, για $x < 0$ η f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και για $x > 0$ η f συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Τώρα μελετάμε αν η C_f έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \cdot |\eta \mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \cdot 1 = \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$$

Άρα απ' το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right) = 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$|e^x \eta \mu x| = |e^x| \cdot |\eta \mu x| \leq e^x \cdot 1 = e^x \Rightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

Άρα απ' το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$.

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ στο $+\infty$.

Γ3. Για $x < 0$ έχουμε ότι $f(x) = e^x \eta \mu x$. Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0 = e^0 \eta \mu 0$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $f(x) = e^x \eta \mu x$ για $x \leq 0$.

Θέτουμε $g(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}, x \in [-\pi, 0]$.

$$\text{Είναι } g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0.$$

$$\text{Είναι } g(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Συνεπώς $g(-\pi)g(0) < 0$. Επιπλέον η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$. Ισοδύναμα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο με

τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$ στο οποίο η C_f τέμνει την ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$.

Γ4. Έστω $y(t) = f(x(t)) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, για $t \geq 0$ και $x(t) > 0$.

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)' = x'(t) \cdot (2x(t) + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Αν υπάρχει $t_0 \geq 0$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και της τεταγμένης του σημείου M να είναι ίσοι, τότε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Συνεπώς παίρνουμε ότι:

$$x'(t_0) = y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = x'(t_0) \cdot (2x(t_0) + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \xrightarrow{x'(t_0) > 0}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x(t_0) + 1)^2 = \left(2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4(x^2(t_0) + x(t_0)) \Leftrightarrow 1 = 0, \text{ που δεν ισχύει!}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο $t_0 \geq 0$.

Επίσης για $x(t) = 0$, δεν ορίζεται ρυθμός μεταβολής.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις - σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - x^{\ln x} \cdot 2x \ln x \cdot F(x)}{(x \ln x)^2} = \frac{x^{\ln x} \left(\frac{x \cdot f(x) - 2 \ln x \cdot F(x)}{x} \right)}{(x \ln x)^2} = 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\dots \text{ Εφόσον } xf(x) = 2F(x) \ln x \Leftrightarrow xf(x) - 2F(x) \ln x = 0!$$

Επομένως η g είναι σταθερή. ΚΟΣ ΣΤ. ΚΕΜΕΝΕΣ

Δ2. i) Οι f, F παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$, άρα:

$$(xf(x))' = (2F(x) \ln x)' \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} - f(x)}{x}$$

Άρα η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης $f'(1) = 2$, εφόσον η εφαπτομένη της C_f στο $(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.

Επίσης για $x = 1$ είναι: $1 \cdot f(1) = 2F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} f'(1) = 2$$

ii. Για $x \neq 1$ είναι: $xf(x) = 2F(x) \ln x \stackrel{x, \ln x \neq 0}{\Leftrightarrow} F(x) = \frac{xf(x)}{2 \ln x}$.

Η F συνεχής στο 1, άρα:

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Έπειτα η g σταθερή, άρα:

$$g(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}$$

$$\text{Για } x = 1: F(1) = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα: } F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0$$

Δ3. Η F συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$F'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} > 0 \stackrel{x^{\ln x}, x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} < 0 \stackrel{x^{\ln x}, x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1, \quad \mu\epsilon \quad x > 0$$

Άρα η F γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Συνεπώς έχει ολικό ελάχιστο το $F(1) = 1$.

Έπειτα:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 1: F(1) - F(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ ισχύει.}$$

Για $x > 1$:

$$x^2 > x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

Όμως $-(x-1)^2 < 0$. Άρα η (1) αδύνατη για $x > 1$.

Για $x \in (0,1)$:

$$x^2 < x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

Όμως $-(x-1)^2 < 0$. Άρα η (1) αδύνατη για $x \in (0,1)$.

Επομένως η $x = 1$ μοναδική λύση της εξίσωσης.

$$\Delta 4. E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx \quad F(x) = x^{\ln x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Ισχύει ότι: $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Όπου x το $\ln^2 x$, για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in [1, e], \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για}$$
$$x = 1$$

$$\text{Τότε: } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

Όμως:

$$\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e (x') \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e (x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}) dx + e - 1 =$$
$$e - \int_1^e 2 \ln x dx + e - 1 = 2e - 1 - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = 2e - 1 - 2(e - e + 1) = 2e - 3$$

$$\text{Άρα: } \int_1^e F(x)dx > 2e - 3$$

