ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2020
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

17/6/2020

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΑΥΣΜΑ

ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ, ΚΑΡΑΟΥΛΑΣ ΠΑΥΛΟΣ, ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ ΟΡΕΣΤΗΣ, ΚΑΡΑΣΟΥΛΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ, ΜΠΟΥΡΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.74

Α4. α) Ψευδής

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.(Σχολικό βιβλίο σελ.60)

Α5. α) Σ

β) Σ

γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3}\Rightarrow (3x_1+1)\cdot(x_2-3)=(x_1-3)\cdot(3x_2+1)\Rightarrow$$
$$3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2+x_1-9x_2-3\Rightarrow 10x_2=10x_1\Rightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η f είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Β2. Για κάθε $x\in D_f$ και $y\in f(D_f)$ θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3}=y\Leftrightarrow 3x+1=y(x-3)\Leftrightarrow 3x+1=yx-3y\Leftrightarrow 3x-yx=-3y-1\Leftrightarrow (3-y)x=-3y-1$$
$$\overset{y\neq 3}{\Leftrightarrow} x=\frac{-3y-1}{3-y}\Leftrightarrow x=\frac{3y+1}{y-3}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{3y+1}{y-3}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}, x\neq 3$.

- $D_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{3\}$
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}, f(x)=f^{-1}(x)$

Άρα οι f και f^{-1} είναι ίσες.

Β3. Η fof ορίζεται αν και μόνο αν $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 3$ και $f(x)\in D_f\Leftrightarrow f(x)\neq 3$

που ισχύει για κάθε $x \in D_f$, αφού η εξίσωση

$f(x)=3 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-3}=3 \Leftrightarrow 3x+1=3x-9 \Leftrightarrow 1=-9$ αδύνατη.

Επομένως $D_{fof}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ με $(fof)(x)\overset{f=f^{-1}}{=}f\left(f^{-1}(x)\right)=x$.

Άρα $(fof)(x)=x, x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

B4. Για κάθε $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},3\right)\cup(3,+\infty)$ έχουμε:

$\left|f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right|\le|f(x)|$,

Οπότε $-|f(x)|\le f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\le|f(x)|$

Όμως, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(-|f(x)|\right)=0=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(|f(x)|\right)$

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)=0.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο τρίγωνο ΒΜΓ έχουμε :

- $\eta\mu\theta=\dfrac{MB}{OB}\Leftrightarrow\eta\mu\theta=MB\Rightarrow B\Gamma=2\eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{OM}{OB}\Leftrightarrow OM=\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow A\Gamma=1+\sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα το εμβαδόν δίνεται από τη σχέση

$(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}(B\Gamma)(AM)=\dfrac{1}{2}2\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in(0,\pi)$

Γ2. $E(\theta)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων με

$E'(\theta)=-\eta\mu^2\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1$

$E'(\theta)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=-1\Rightarrow\theta=\pi$ (απορρίπεται) ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$

Άρα για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow E'(\theta) > 0$ και για $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ $E'(\theta) < 0$, η συνάρτηση στο $\frac{\pi}{3}$ μεγιστοποιείται.

Γ3. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $E(\theta)$

Από Γ1 έχουμε ότι

- για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow E'(\theta) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και συνεχής άρα αν $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τότε $E(A_1) = E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$
- για $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \Rightarrow E'(\theta) < 0 \Rightarrow E \searrow \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και συνεχής άρα αν $A_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ τότε $E(A_2) = E\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Παρατηρούμε ότι $\frac{3}{4} \in E(A_1)$ και $\frac{3}{4} \in E(A_2)$ άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχουν $\theta_1 \in A_1$ και $\theta_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $E(\theta_1) = E(\theta_2) = \frac{3}{4}$, τα οποία θα είναι και μοναδικά καθώς η συνάρτηση ειναι μονότονη σε κάθε ένα απο τα διαστήματα A_1 και A_2 αντίστοιχα

Γ4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ στα οποία η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη, άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ τέτοια, ώστε:

- $E'(\xi_1) = \dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) \quad (1)$

- $$E'(\xi_2)=\frac{E(\theta_2)-E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)E'(\xi_2)=E(\theta_2)-E\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)=E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_2)\ (2)$$

Από Γ3 έχουμε ότι $E(\theta_1)=E(\theta_2)$ άρα εξισώνουμε τις (1) και (2) και παίρνουμε το ζητούμενο. $\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις πραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$, παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, άρα $f'\nearrow(0,+\infty)$, επομένως $x=1$ είναι μοναδική ρίζα.

Για $0<x<1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1)$

Για $x>1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(1,+\infty)$

Η συνάρτηση στο x=1 παρουσιάζει ελάχιστο με $f(1)=-\ln\lambda$

Το σημείο του ακροτάτου είναι το $(1,-\ln\lambda)$,καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$ τα σημεία θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x=1$.

Δ2.
$x^x\ge\lambda x\Rightarrow\ln(x^x)\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\ge0\Leftrightarrow f(x)\ge0$

Όμως $f(x)\ge-\ln\lambda$, αρκεί λοιπον $-\ln\lambda\ge0\Leftrightarrow\lambda\le1$ άρα $\lambda=1$

Δ3. 'Εστω $M(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής , τότε η εξίσωση της εφατομένης θα είναι $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από $(0,0)$ άρα

$$-g(x_0)=g'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow {x_0}^{x_0}={x_0}^{x_0}(\ln x_0+1)x_0 \Leftrightarrow x_0\ln x_0+x_0-1=0 \overset{x_0>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0+1-\frac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=1 \ \text{από } (Δ1)$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(1,1)$ και η ευθεία ειναι η $y=x$

Δ4. (i) για $x>0$ η $h(x)$ είναι συνεχής

Για $x=0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}\overset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to 0}e^u=1=h(0)$

(*)θέτουμε $x\ln x=u$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής

(ii)

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 h(1-t)dt$ γίνεται

Θέτουμε $x=1-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow dt=-dx$

- Για $t=0\Rightarrow x=1$
- Για $t=1\Rightarrow x=0$

Άρα $\int_0^1 h(1-t)dt=\int_1^0 -h(x)dx=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$ (1)

Από ερώτημα Δ2 για λ=1 έχουμε τα εξής

- $x^x\geq x\Rightarrow \int_0^1 x^x dx>\int_0^1 xdx\Leftrightarrow \int_0^1 g(x)dx>\dfrac{1}{2}$ (2)
- $x^x\geq x\Rightarrow \int_1^2 x^x dx>\int_1^2 xdx\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx>\dfrac{3}{2}$ (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 g(x)dx$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,1]$

$\varphi(0)=\int_0^1 g(x)dx>\dfrac{1}{2}>0$ από (2)

$\varphi(1)=3-2\int_1^2 g(t)dt<0$ από (3)

Άρα από Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$.