# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2020
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
# (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

## 17/6/2020

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ, ΚΑΡΑΟΥΛΑΣ ΠΑΥΛΟΣ, ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ ΟΡΕΣΤΗΣ, ΚΑΡΑΣΟΥΛΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ.76

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελ.104

**Α3.** α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Σχολικό βιβλίοσελ.136)

**Α4.** α) Λ (Σχ. βιβλίο σελ.61)

β) Σ (Σχ. βιβλίο σελ.25)

γ) Σ (Σχ. βιβλίο σελ. 19)

δ) Σ (Σχ. βιβλίο σελ.76)

ε) Σ (Σχ. βιβλίο σελ.177)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $x\in D_g \Leftrightarrow x\in R$ και $g(x)\in D_f \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

Άρα: $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

**Β2.** $(f\circ g)'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=$

$$=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0, \text{ για κάθε } x>0$$

Άρα η fog είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και ''1 – 1'', άρα αντιστρέφεται.

Είναι: $D_{f\circ g^{-1}}=(f\circ g)(D)\underset{f\circ g,\,\text{συνεχής}}{\overset{f\circ g,\downarrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x),\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)\right)=(1,+\infty)$

Εφόσον:

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

- $\lim\limits_{x\to0^+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^x+2\right)\cdot\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$

  διότι: $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)=0$ και $x>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow e^x-1>0$

Είναι: $(f\circ g)(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=y\Leftrightarrow e^x+2=ye^x-y\Leftrightarrow$

$$e^x-ye^x=-y-2\Leftrightarrow e^x(1-y)=-y-2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow$$

$\ln e^x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Άρα: $f^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right),\ y>1$

Όπου y το x έχουμε: $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right),\quad x\in(1,+\infty)$

**B3.** $\varphi(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1},\quad x\in(1,+\infty)$

$$\varphi'(x)=\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)'=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x-2}{(x+2)(x-1)}=$$

$$=\frac{x-1-x-2}{(x+2)(x-1)}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0,\quad \text{για κάθε } x>1$$

και φ συνεχής, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

**B4.** • $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\underset{u_0=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left((x+2)\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty}{\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=}}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

$$= \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) \underset{u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1}{\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=}}$

$$= \lim_{u\to1} \ln u = \ln 1 = 0$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** $D_f = \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1 - \ln\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x = \lambda$. Άρα $1-\ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = 1-\lambda$.. Θεωρώ τη συνάρτηση g με $g(x) = \ln x - 1 + x$, με $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ με προφανής ρίζα $x = 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0, \forall x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα η $x = 1$ μοναδική ρίζα της $g$. Άρα $\lambda = 1$.

**Γ2.** Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Εξετάζω την f ως προς την παραγωγισιμότητα στο σημείο $x = 0$.

Είναι: Για $x > 0$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Για $x<0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=1.$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$..

Η εφαπτομένη (ε) της $C_f$ στο A(0, 1) έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x-1.$$

Είναι $f'(0)=1 \Rightarrow εφω=1$ άρα $\hat{\omega}=\frac{\pi}{4}$, όπου $\hat{\omega}$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_f$ με τον x′ x.

**Γ3.** Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία εκείνα που η παράγωγος της f μηδενίζεται και σε εκείνα που η f δεν παραγωγίζεται. Η f όμως είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του

$\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$, με

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x\le 0\\ συνx-ημx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Όμως για $x\le 0: f'(x)\succ 0$

$$\text{Για } x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right):\ f'(x)=0\Leftrightarrow συνx=ημx\ \Leftrightarrow εφx=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{4}.$$

Συνεπώς, η $C_f$ έχει δύο κρίσιμα σημεία.

$B\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ και $Γ\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, με $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

**Γ4.** Η εφαπτομένη της f στο $M(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

Για $y=0$ έχουμε : $f'(\alpha)x=\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{f'(\alpha)}\Leftrightarrow x=\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Άρα $B=(\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},0)$

$$x_B=\alpha-\frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{1}{(1-\alpha)^2}}=\alpha-(1-\alpha)=2\alpha-1$$

Άρα για οποιαδήποτε στιγμή t έχουμε:

$x_B(t)=2\alpha(t)-1$ και $x_B'(t)=2\alpha'(t)$

Για $t=t_0$: $x_B'(t_0)=2\alpha'(t_0)=-\dfrac{2\alpha(t_0)}{3}=-\dfrac{2(-1)}{3}=\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδες χρόνου}}$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για $x\in\mathbb{R}, f'(x)=e^x+2x-e$

Η $f'$ συνεχής στο $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$f'(0)=e^0-e=1-e<0$
$f'(1)=e+2-e=2>0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$

$f''(x)=e^x+2>0, x\in\mathbb{R}$. Άρα η $f'$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$0<x<x_0\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0.$ Άρα $f\downarrow$ στο $[0,x_0]$

$x_0<x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0.$ Άρα $f\uparrow$ στο $[x_0,1]$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0$ το $f(x_0)=e^{x_0}+x_0{}^2-ex_0-1$

Άρα, $f(x)\geq e^{x_0}+x_0{}^2-ex_0-1, \forall x\in\mathbb{R}$

Είναι

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$

Άρα, $f(x_0)=e-2x_0+x_0^{\,2}-ex_0-1=x_0^{\,2}-(e+2)x_0+e-1$.

**Δ2.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\left(1+\left[\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right)\right]=\ell$

Είναι $f(x)\geq f(x_0), \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)-f(x_0)\geq 0$, κοντά στο $x_0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$

Για $x\neq x_0$, $\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right|\leq\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\leq\left|f(x)-f(x_0)\right|$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\left|f(x)-f(x_0)\right|\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)-f(x_0)\right|=0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right)=0$

Άρα $\ell=+\infty$.

**Δ3.** Θεωρώ $\varphi(x)=f(x)+x-x_0, x\in\mathbb{R}$

$\varphi(x)=e^x+x^2-ex-1+x-x_0, x\in\mathbb{R}$

Για $x\in\mathbb{R}$ $\varphi'(x)=e^x+2x-e+1$

Για $x\in\mathbb{R}$ $\varphi''(x)=e^x+2\succ 0$. Άρα $\varphi'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της $\varphi'$ είναι $\varphi'\left((x_0,1)\right)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{\varphi'\uparrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi'(x),\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi'(x)\right)=(1,3)$.

Άρα $\varphi'(x)>0$, για $x\in(x_0,1)$.

Άρα $\varphi\uparrow$, στο $[x_0,1]$.

Η $\varphi$ συνεχής στο $[x_0,1]$

$\varphi(1)=1-x_0>0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΣΕΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

$\varphi(x_0)=f(x_0)<0$ , διότι για $x_0<x<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_0)<f(1)=0$.

Από Θεώρημα Bolzano , υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1):\varphi(\rho)=0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι $\varphi\uparrow$ στο $[x_0,1]$.

**Δ4.** Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ΘΜΤ στο $[x_0,\rho]$

- f συνεχής στο $[x_0,\rho]$
- f παραγωγίσιμη στο $(x_0,\rho)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x_0-\rho-f(x_0)}{\rho-x_0}=-1-\frac{f(x_0)}{\rho-x_0}$$

όμως: $\xi<\kappa \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\kappa) \Leftrightarrow -1-\frac{f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(\kappa) \Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(\kappa)+1 \overset{\rho-x_0=-f(\rho)}{\Leftrightarrow}$

$$f'(\kappa)+1>-\frac{f(x_0)}{-f(\rho)} \overset{f(\rho)<0}{\Leftrightarrow} f(x_0)>f(\rho)(f'(\kappa)+1)$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ