ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2019
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

10/6/2019

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ,
ΚΑΡΑΟΥΛΑΣ ΠΑΥΛΟΣ, ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ ΟΡΕΣΤΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1) **α)** Σχολικό σελίδα 15

β) **i)** Μία συνάρτηση f: A $\to$ R έχει αντίστροφη όταν είναι "1-1"

ii) Σχολικό σελίδα 35

Α.2) Σχολικό σελίδα 142

Α.3) Σχολικό σελίδα 135

Α.4) **α)** Λάθος

Αιτιολόγηση: Σχολικό σελίδα 134

β) Λάθος

Αιτιολόγηση: Σχολικό σελίδα 71

Α.5) (γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2$, άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

Β2. $f(x)=e^{-x}+2,\ x\in R$

Εχουμε: $f(x)-x=0$

Θέτουμε $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x,\ x\in R$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$g'(x)=-e^{-x}-1<0$, για κάθε $x\in R$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

• Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις- σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

• $g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0$

$g(3)=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\frac{1-e^{3}}{e^{3}}<0$

Τότε: $g(2)\cdot g(3)<0$

Από Θ. Bolzano η $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (2,3) και εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα, είναι μοναδική.

B3. $f'(x)=-e^{-x}<0$, για κάθε $x\in R$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα και ΄΄1-1΄΄, οπότε αντιστρέφεται. Τότε:

$f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \Leftrightarrow$ Πρέπει: $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$

$\ln e^{-x}=\ln(y-2) \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$

Άρα: $f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$, $y>2$

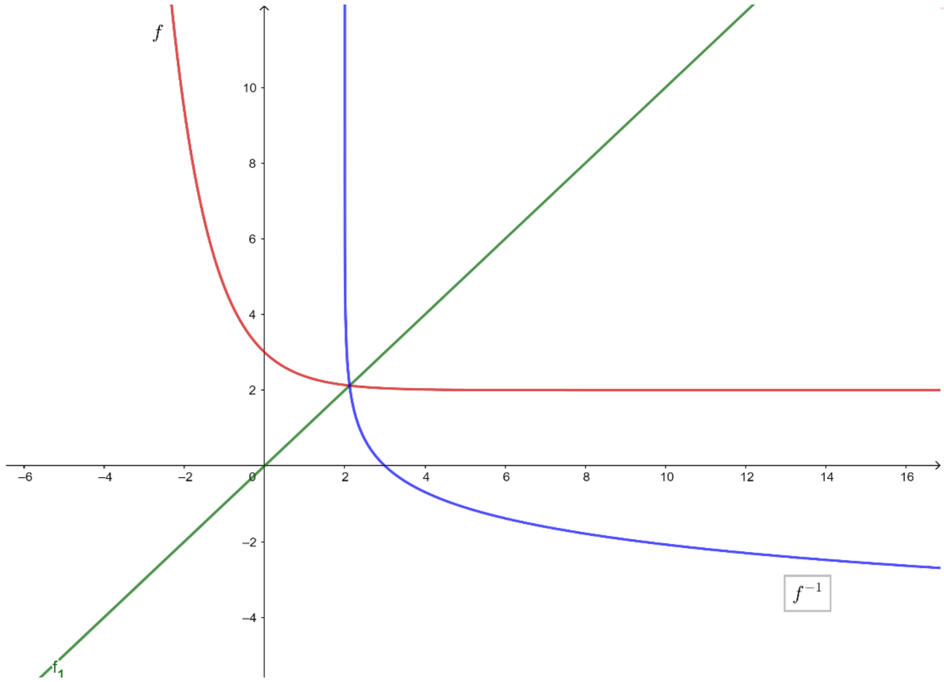
Όπου y το x έχουμε: $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$

B4. Είναι:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \underset{u_0=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to 0}(-\ln u)=+\infty$$

Άρα η x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right) = \lim_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha\right) \Leftrightarrow 1+\beta = 1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+\alpha)}{x-1} \overset{\alpha=\beta}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha}{1} = 1+\alpha$$

Άρα $\alpha+1=2 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta=1$

Γ2. Για $x>1$: η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x>0$ για κάθε $x>1$ άρα $f \nearrow (1,+\infty)$

Για $x<1$: η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x<1$ άρα $f\nearrow(1,+\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής θα ισχύει $f\nearrow\mathbb{R}$

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

Αν $A_1=(-\infty,1)$ τότε αφού $f\nearrow A_1$ και συνεχής άρα

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to1^-}f(x)\right)=(-\infty,2)$$

Αν $A_2=[1,+\infty)$ τότε αφού $f\nearrow(1,+\infty)$ και συνεχής άρα

$$f(A_2)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[2,+\infty)$$

Τελικά $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\mathbb{R}$

Γ3. (i) Ισχύει ότι $f((-\infty,0))\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f\nearrow}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0^-}f(x)\right)=(-\infty,e^{-1})$ άρα $0\in(-\infty,e^{-1})$, από Θ.Ε.Τ θα υπάρχει $x_0\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, f γνησίως αύξουσα άρα το x_0 είναι μοναδικό.

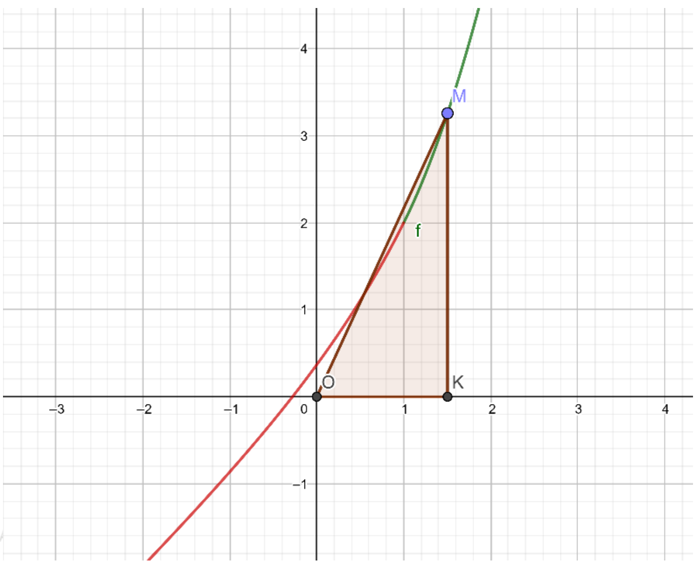
(ii) η εξίσωση γίνεται $f(x)(f(x)-x_0)=0\Leftrightarrow(f(x)=0 \text{ ή } f(x)-x_0=0)$

Η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ αφού $f(x_0)=0$ μόνο για $x=x_0$

Η εξίσωση $f(x)=x_0$ είναι επίσης αδύνατη αφού για

$$x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0 \text{ ενώ } f(x)=x_0<0 \text{ άρα άτοπο.}$$

Γ4.



Από σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο MOK, άρα $E=\frac{1}{2}KM\cdot OK$.

$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot f((t))=\frac{1}{2}x(t)(x^2(t)+1)=\frac{1}{2}(x^3(t)+x(t))$, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$E'(t)=\frac{1}{2}(3x^2(t)x'(t)+x'(t))$

Για $t=t_0$ έχουμε ότι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$ άρα

$E(t_0)=\frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0))=\frac{1}{2}(3\cdot 9\cdot 2+2)=\frac{1}{2}56=28\tau.\mu/\sec$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$ έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$ και ταυτίζεται με την ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}A\in(\varepsilon)\\ f'(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=1\\ f'(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$$

Δ2. Θεωρώ την συνάρτηση

$\kappa(x)=f(x)-(-x+2)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι για κάθε $x\in[1,2]$: $x-1\geq 0$ και $\ln(x^2-2x+2)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$.

Άρα, $\kappa(x)\geq 0,\ x\in[1,2]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_1^2|\kappa(x)|dx=\int_1^2\kappa(x)dx=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$$

Θέτω $u=x^2-2x+2,\ du=2x-2=2(x-1)$

Για $x=1,\ u=1$ και για $x=2,\ u=2$

και άρα,

$$E=\int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u du=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 1du\right)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Δ3. i) Ισοδύναμα θα δείξω ότι $\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ και $\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Ισοδύναμα θα δείξω ότι

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-\lambda}\geq -1$$

Όμως η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ διότι:

f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ και άρα υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-\lambda}$.

Επομένως αρκεί να δείξω ότι $f'(\xi)\geq -1$ που ισχύει διότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ4. Είναι $g'(x)=-3x^2-1$. Η εφαπτομένη της C_g στο Β(0,2) είναι:

$y-g(0)=g'(0)\cdot x \Leftrightarrow y-2=-x \Leftrightarrow y=-x+2$.Δηλαδή η C_f και η C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την $y=-x+2$.

$f'(1)=g'(0)=-1$, όμως $f'(x)\geq -1$, για κάθε xεR και η ισότητα ισχύει για χ=1.

Επίσης $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$, για κάθε xεR και η ισότητα ισχύει για x = 0.

Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη, δηλαδή η y = -x +2 είναι μοναδική.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ