ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2022
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

06/06/2022

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ

ΚΑΡΑΟΥΛΑΣ ΠΑΥΛΟΣ, ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ ΟΡΕΣΤΗΣ, ΚΑΡΑΣΟΥΛΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.186)

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.142)

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.161)

Α4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, D_f = (-\infty, 1]$

$g(x) = \sqrt{x},\ D_g = [0, +\infty)$

$(fog)(x) = f(g(x))$ με

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Άρα $D_h = [0,1]$.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,\ x \in [0,1].$$

Β2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$.

$h'(x) = 2(x-1) < 0, x \in (0,1)$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1). Συνεπώς η συνάρτηση είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη.

Θέτω $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}, x \in [0,1]$.

$x \in [0,1] \to 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 1.$ Άρα $y \in [0,1]$.

Άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$.

B3. i) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο 1

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}{(1-x)\cdot(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(1-x)\cdot(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}=f(1).$$

Άρα f συνεχής.

Επίσης, $\varphi(0)=1$ και $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$. Άρα $\varphi(0)\neq\varphi(1)$.

Συνεπώς πληρούνται οι υποθέσεις του ΘΕΤ.

ii) Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Leftrightarrow\varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0).$$

Άρα από ΘΕΤ θα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για $x<-1$: $f'(x)=-2 \Rightarrow f'(x)=(-2x)' \Rightarrow f(x)=-2x+c_1$

Για $x>-1$: $f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(x)=(x^3-x)' \Rightarrow f(x)=x^3-x+c_2$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0 \Leftrightarrow 0^3-0+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=0$

Η f είναι συνεχής άρα και συνεχής στο -1

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}(-2x+c_1)=\lim_{x\to -1^+}(x^3-x) \Leftrightarrow 2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$$

Συνεπώς η συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & ,x\le -1 \\ x^3-x & ,x>-1 \end{cases}$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ που διέρχεται από το $(0,-2)$ είναι:

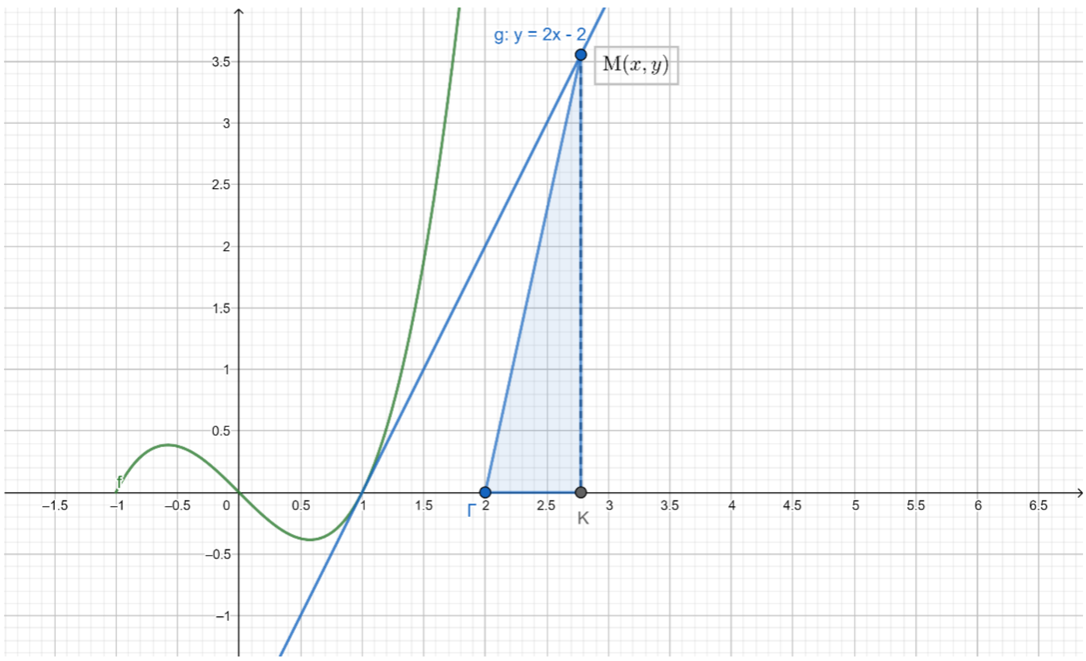
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \overset{x=0,y=-2}{\Rightarrow} -2-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2+f(x_0)=x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow 2+x_0^{\,3}-x_0=x_0(3x_0^{\,2}-1) \Leftrightarrow 2+x_o^{\,3}-x_0=3x_0^{\,3}-x_0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^{\,3}=2 \Leftrightarrow \boxed{x_o=1}$$

Άρα $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y=2x-2}$

Γ3.



Το εμβαδόν είναι :

$$E=\frac{1}{2}ΓK\cdot KM=\frac{1}{2}(x_M-2)y_M=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$$

Άρα $E(t)=x^2(t)-3x(t)+2 \Rightarrow E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$

Για $t=t_0$ ισχύει ότι $x(t_0)=3,\ x'(t_0)=2$, άρα

$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot3\cdot2-3\cdot2=6$ τ.μ./sec

Γ4. Έστω $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=L$, τότε

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$

  Ισχύει ότι

  $$|\eta\mu(f(x))|\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

  με $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0$, απο κριτήριο παρεμβολής

  έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\ \overset{\substack{-x=u\\ x\to-\infty\\ u\to+\infty}}{=}\ \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Συνεπώς $L=0+1=1$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΠΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) • Η f συνεχής ως πράξεις – σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

- $f'(x)=1-\dfrac{3}{3x}=\dfrac{x-1}{x}$

  $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$, το $f(1)=1-\ln 3$.

Έστω $A_1 = (0,1]$ και $A_2 = [1,+\infty)$. Τότε:

- $f(A_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$

Όμως $0 \in f(A_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο A_1, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in A_1 = (0,1]$.

Έπειτα:

- $f(A_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$

Διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - \ln 3x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1 - \dfrac{\ln 3x}{x}\right]$

Με $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 3x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(1-0) = +\infty$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Όμως $0 \in f(A_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο A_2, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in A_2 = [1,+\infty)$.

Επομένως η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Είναι $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f κυρτή.

Δ.2) $f(x)=0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$

Τότε: $E = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx$

Είναι: • $x_1 \le x \le 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \ge f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

• $1 \le x \le x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Τότε:

$$E=\int_{x_1}^{x_2}(-x+\ln 3x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}xdx+\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx$$

Όμως:

- $\int_{x_1}^{x_2}xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{x_2^2-x_1^2}{2}$

- $\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)dx=\left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-x_2+x_1$$

Άρα:

$$E=x_2\ln 3x_2-x_1\ln 3x_1-x_2+x_1-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}$$

Όμως: $f(x_1)=0\Leftrightarrow\ln(3x_1)=x_1$ και $f(x_2)=0\Leftrightarrow\ln(3x_2)=x_2$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Συνεπώς:

$$E=\frac{x_1^2-x_2^2}{2}+x_2{}^2-x_1{}^2-x_2+x_1=\frac{x_1^2-x_2^2+2x_2{}^2-2x_1{}^2-2x_2+2x_1}{2}=\frac{x_2^2-x_1{}^2-2x_2+2x_1}{2}=$$

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{2}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. $x_2>1$ και

$$0<x_1<1\Leftrightarrow-1<-x_1<0\Leftrightarrow1<2-x_1<2$$

Άρα $x_2,2-x_2\in(1,+\infty)$. Τότε:

$$f(2-x_1)<0\Leftrightarrow f(2-x_1)<f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}2-x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+x_2>2$$

Το οποίο ισχύει διότι το εμβαδόν στο Δ2 είναι θετικό, άρα:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)>0\overset{x_2-x_1>0}{\Leftrightarrow}x_2+x_1-2>0$$

Δ4. $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2,f(x_2))$ είναι η $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow}\boxed{y=f'(x_2)(x-x_2)}$

Η f είναι κυρτή **(Δ1(ιι))**, οπότε θα ισχύει ότι $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\geq 0$ (1) για κάθε $x>0$ με το $"="$ να ισχύει μόνο για $x=x_2$

Επίσης η f παρουσιάζει ελάχιστο **(Δ1(ι))** στο $x=1$ το $f(1)=1-\ln 3$, άρα $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)\geq 0$ (2) για κάθε $x>0$ με το $"="$ να ισχύει μόνο για $x=1$.

$2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-(1-\ln 3)=f'(x_2)(x-x_2)-f(x)$
$\Leftrightarrow[f(x)-f(1)]+[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)]=0$, από (1) και (2) έχουμε άθροισμα μη αρνητικών παραστάσεων άρα υποχρεωτικά θα ισχύει

$\begin{cases} f(x)-f(1)=0 \\ f(x)-f'(x_2)(x-x_2)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x)=f(1) \\ f(x)=f'(x_2)(x-x_2) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=x_2 \end{cases}$ με $x_2>1$ άρα **άτοπο!**