ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2021
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

16/6/2021

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΑΥΣΜΑ

ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ, ΚΑΡΑΟΥΛΑΣ ΠΑΥΛΟΣ, ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ ΟΡΕΣΤΗΣ, ΚΑΡΑΣΟΥΛΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4.

α) ΣΩΣΤΟ (Σχολικό βιβλίο σελ. 52)

β) ΛΑΘΟΣ (Σχολικό βιβλίο σελ. 36)

γ) ΣΩΣΤΟ (Σχολικό βιβλίο σελ. 47)

δ) ΣΩΣΤΟ (Σχολικό βιβλίο σελ. 156)

ε) ΣΩΣΤΟ (Σχολικό βιβλίο σελ. 77)

ΘΕΜΑ Β

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+1) = (x+1)\cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$

Β1. Θέτουμε: $x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$. Τότε: $f(y)=y\cdot e^{-(y-1)} \Rightarrow f(y)=y\cdot e^{1-y}, y\in\mathbb{R}$

Όπου y το x έχουμε : $f(x)=x\cdot e^{1-x}, x\in\mathbb{R}$.

Β2. f συνεχής ως πράξεις – σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}\cdot(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}=0$ Αδύνατη ή $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

Άρα η $f:\uparrow$ στο $(-\infty,1]$ και $f:\downarrow$ στο $[1,+\infty)$. Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$, το $f(1)=1$.

Β3. $f''(x) = -e^{1-x}\cdot(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x} + x\cdot e^{1-x} - e^{1-x} = x\cdot e^{1-x} - 2e^{1-x} = e^{1-x}\cdot(x-2)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}=0$ Αδύνατη ή $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

$$f(2)=\frac{2}{e}$$

- $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(x-2)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Άρα, η f κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Έπειτα:

- Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- ΠΛΑΓΙΕΣ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ

  Έστω $y=\lambda x+\beta$. Τότε,

  $$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} \underset{u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty}{\overset{u=1-x}{=}} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$$

  και $B = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0$.

  Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

  $$\lambda' = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \underset{u_0=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty}{\overset{u=1-x}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4.

i) Έστω $A_1=(-\infty,1]$ και $A_2=[1,+\infty)$. Τότε,

- $f(A_1)\overset{f:\uparrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty},f(1)\right]=(-\infty,1]$.

  $$\lim_{x\to-\infty} xe^{1-x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

- $f(A_2)\overset{f:\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty},f(1)\right]=(0,1]$

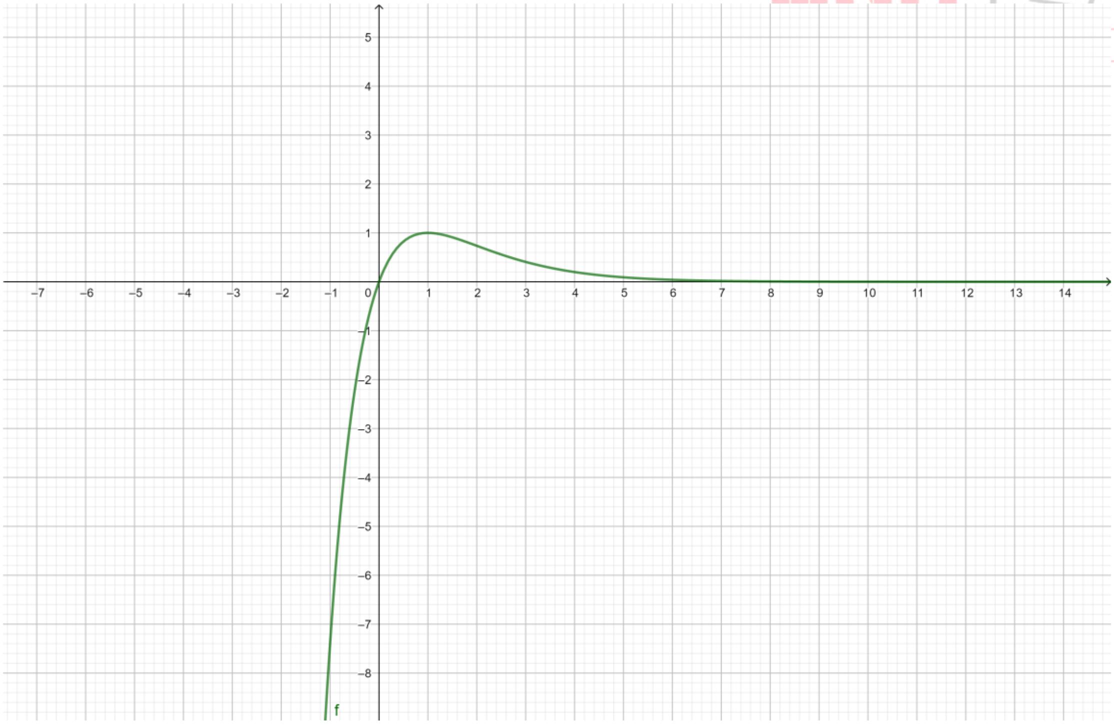
  $$\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x}=0$$

Επομένως, $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]\cup(0,1]=(-\infty,1]$.

ii) $f(x)=\lambda,\lambda\in\mathbb{R}$.

- $f(0)=0$, άρα η $\mathbb{C}_f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	
$f''(x)$			-		0	+	
$f(x)$			ο.μ. 1		Σ.Κ. $\frac{2}{e}$		0



Με βάση τη $\mathbb{C}_f$ παρατηρούμε ότι :

- Αν $\lambda \in (-\infty,0)\cup\{1\}$, η f(x)=λ έχει ακριβώς μία λύση.
- Αν $\lambda \in (0,1)$, η f(x)=λ έχει ακριβώς 2 λύσεις.
- Αν $\lambda \in (1,+\infty)$, η f(x)=λ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Στο x0 = 0: Είναι: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

Άρα η f συνεχής στο 0.

Επομένως η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

‘Επειτα:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(\alpha x^2-3x-1)}{x}=-1$$

Και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. **(i)** • Η f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

• Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με: $f'(x) = -\eta\mu x$

• $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$, άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα η f δεν ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι: $f'(x) = -\eta\mu x$. Άρα:

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x < 0$.

Για $x < 0$ είναι: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$

$$\Delta = 36 + 12\cdot\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0$ είναι αδύνατη για κάθε $x < 0$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$.

Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

Γ4. Για $x > 0$: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$: $f'(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow x = \pi$

x		0		π		$3\pi/2$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	↘				↗	

Ο.Ε

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο π, άρα:

Για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι: $f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, με $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, e]$ με

- $h(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$
- $h(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Για την h ισχύει το θεώρημα του Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}} (1)$. Το οποίο x_0 είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως μονότονη.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln(x_0)-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln(x_0)-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\ln(x_0) \Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln(x_0)} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow x=x_0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x_0-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>x_0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x_0-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow x<x_0$$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_0$ το

$$f(x_0)=(\ln(x_0))(x_0+1)-\ln x_0-1\overset{(1)}{=}\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\frac{1}{x_0}-1=1+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=0\,.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Δ3. Για το κοινό σημείο των C_g, C_h, λύνουμε την εξίσωση $g(x)=h(x)$.

Για $x=0$ είναι $g(0)=0\neq\dfrac{x_0}{e}=h(0)$, άρα $x=0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Για $x<0$, είναι $g(x)=xe^{-x}<0$ και $h(x)=\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$, άρα δεν υπάρχει $x<0$ που να επαληθεύει την εξίσωση $g(x)=h(x)$.

Για $x>0$, είναι:

$$g(x)=h(x) \Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(xe^{-x}\right)=\ln\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)(\ln x_0-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1)-\ln x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$$

Όμως από το ερώτημα Δ1. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,e)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Από Δ2. είναι $f'(x_0)=0$.

Άρα $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow g'(x_0)-h'(x_0)=0 \Leftrightarrow g'(x_0)=h'(x_0)$.

Τελικά, $\begin{cases} g'(x_0)=h'(x_0) \\ g(x_0)=h(x_0) \end{cases}$ και άρα οι C_g, C_h, δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0.

Δ4. Η απόσταση των σημείων Α και Β δίνεται από τη συνάρτηση $d(x)=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)$, $x>0$, διότι, $f(x)-\varphi(x)>0$, για κάθε $x>0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:
  η d θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και φ.
  x_0 εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$
  η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.
  Άρα από το θεώρημα του Fermat είναι
  $d'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0)=0$ και άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.
- Αν η συνάρτηση φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:
  αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση, x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.