ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2023
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

06/06/2023

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.111)

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.104)

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.128)

Α4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $h(x) = lnx, D_h = (0,+\infty)$

$g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}, D_g = R$

A_{gof} ={x ∈ A_h/ h(x)∈A_g} ={x>0/lnx∈R}=(0, +∞) και (goh)(x)=g(h(x))=$\frac{4-x^2}{x}$.

Άρα : f(x)=$\frac{4-x^2}{x}$, x>0.

Β2. i) f παρ/μη ως ρητή με f′(x)=$\frac{-2x^2-(4-x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0, \forall x > 0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο (0,+∞)

ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$ που ισχύει.

Β3. Ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(4-x^2) = +\infty\cdot 4 = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Ψάχνουμε για πλάγια της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Ισχύει ότι $\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|\le 1 \overset{\cdot\frac{1}{|f(x)|}}{\Leftrightarrow}\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}\right|\le\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}\le\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}$ για κάθε $x>0$

Με $\lim_{x\to+\infty}\left|f\left(x\right)\right|=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}=0=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}\right)$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}=0$.

Θέμα Γ

Γ1. Από το ολοκλήρωμα έχουμε ότι $\int_2^3 xf\left(x\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow$

$\int_2^3\left(1+\alpha x\right)dx=1\Leftrightarrow\left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow 3+\frac{9\alpha}{2}-2-2\alpha=1\Leftrightarrow 1+\frac{5\alpha}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=0$

Γ2.(i) αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.
Έχουμε ότι:

- $\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^-}\left(2x-3\right)=-1$
- $\lim_{x\to1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-1$

Αφού $\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=-1$ έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'\left(1\right)=-1$

(ii) η εφαπτομένη στο $x_0=1$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+2$

Με κλίση $\lambda=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta=-1 \Leftrightarrow \theta=135^{o}$

Γ3. Για $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3<0$ για κάθε $x<1$ άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$.

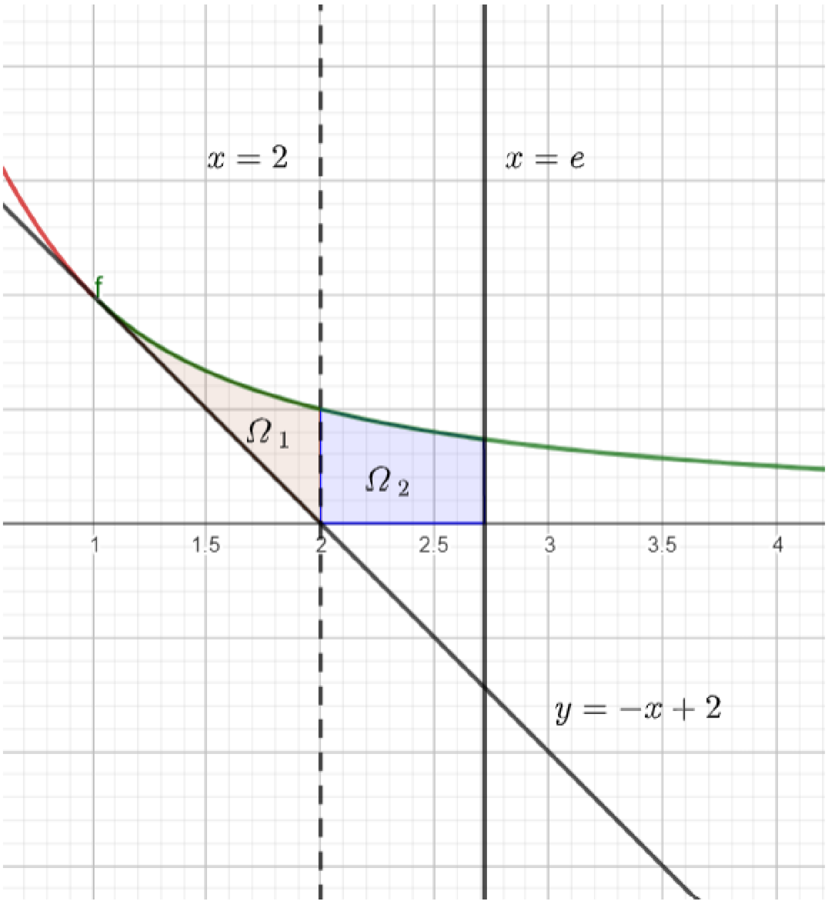
Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ για κάθε $x>1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ θα είναι και συνεχής σε αυτό άρα f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Συνεπώς η f είναι «1-1».

Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα άρα
$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$ αφού

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$

Γ4.



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε ότι το εμβαδόν δίνεται από το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1 και Ω_2.

$$E=\Omega_1+\Omega_2=\int_1^2\left(f\left(x\right)-y\right)dx+\int_2^e f\left(x\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln x\right]_2^e=\ln 2-2+\frac{3}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Κοντά στο 1 θέτουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\Rightarrow f(x)=(x-1)g(x)+2x,\ \text{με}\ \lim_{x\to 1}g(x)=1\in R$$

Τότε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right]=0\cdot 1+2=2\Rightarrow$$
$$\ln 1-1+\kappa=2\Rightarrow$$
$$\kappa=3$$

Δ2. $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3,\ \ x\in(0,2)$

- Η f συνεχής, ως πράξεις – σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x)=\dfrac{-1}{2-x}+\dfrac{1}{x^2}$
- $f''(x)=\dfrac{-1}{(2-x)^2}-\dfrac{2}{x^3}<0$, για κάθε $x\in(0,2)$.

Άρα f' :↘. Επίσης $f'(1)=-1+1=0$, άρα η $x=1$ μοναδική ρίζα της f'.

X	0	1	2
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Η f παρουσιάζει ολ. ελάχιστο το $f(1)=2$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Έστω: $A_1=(0,1]$ και $A_2=[1,2)$, τότε:

- $f(A_1)\overset{\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$

Όμως $0\in f(A_1)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $x_1\in A_1$.

- $f(A_2)\overset{\searrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to 2^-}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$

Όμως $0\in f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $x_2\in A_2$.

Έπειτα: Έστω $\Delta=\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ με: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}f(x)=\ln(2-\dfrac{1}{3})-3+3=\ln\dfrac{5}{3}>0$

Οπότε: $f(\Delta)=\left(-\infty,\ln\dfrac{5}{3}\right)$

Όμως $0\in f(\Delta)$, άρα η μοναδική λύση x_1 του A_1 της εξίσωσης $f(x)=0$ ανήκει στο Δ. Οπότε $x_1<\dfrac{1}{3}$.

Δ3. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\frac{1}{3})-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

Η $f':\searrow$, το ζητούμενο ξ είναι μοναδικό.

Δ4. i) Είναι: $F(x)=G(x)+c,\ c\in R$.

Για $x=x_1$: $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow c=-G(x_1)$

Τότε: $F(x)=G(x)-G(x_1)$

Για $x=x_2$: $F(x_2)=G(x_2)-G(x_1)\Leftrightarrow F(x_2)=-G(x_1)\Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$

ii) Έστω: $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2,\ x\in\left[x_1,x_2\right]$.

- Η h συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2=x_2G(x_1)+x_1-x_2<0$, διότι:

$$x_1<x\le 1\overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>0$$

$$1\le x<x_2\overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x)>0$$

Άρα $f(x)>0$, για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, οπότε η G γν. αύξουσα στο (x_1,x_2).

Όμως:

$$x_1<x_2\overset{G:\nearrow}{\Leftrightarrow}G(x_1)<G(x_2)\Leftrightarrow G(x_1)<0$$

Επίσης $x_2>0$ και $x_1-x_2<0$

Και

$h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) + 2x_2 - x_1 - x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$, διότι:

$$x_1 < x_2 \overset{F:\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) > 0$$

Από Θ.Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2).

Έπειτα: $h'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Άρα η h γν. αύξουσα στο (x_1, x_2), οπότε έχει μία το πολύ ρίζα στο(x_1, x_2).

Επομένως ισχύει το ζητούμενο.